Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I

Derivadas – Desigualdades y polinomios de Taylor

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes.

Ejercicios en los que se pide probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, donde f y g son funciones derivables. Se hace lo siguiente:

- Se define $h(x) = g(x) - f(x)$ y se comprueba que $h(a) = 0$.
- Se comprueba que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

Esta última desigualdad implica que h es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h(a) = 0$, concluimos que $h(x) \geqslant 0$, es decir, $g(x) - f(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant a$.

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto a debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad $h'(x) \geqslant 0$ es más fácil que la inicial. Puede ocurrir que esta desigualdad siga siendo complicada; entonces podemos aplicarle a ella el mismo procedimiento, comprobamos que $h'(a) = 0$ y que $h''(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$, lo que implica que h' es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h'(a) = 0$, concluimos que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

También debes tener en cuenta que probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$ donde I es un intervalo, y hay un punto $a \in I$ tal que $f(a) = g(a)$, es lo mismo que probar que en el intervalo I la función $h(x) = g(x) - f(x)$ alcanza un mínimo absoluto en el punto a.

Los teoremas de Taylor–Young y de Taylor se usan para obtener aproximaciones polinomiales de una función dada y para calcular valores aproximados con precisión prefijada.

1. Sean $0 < x < y$. Prueba que:
   a) $\dfrac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x < \dfrac{y-x}{1+x^2}$.

   b) $\dfrac{y-x}{y} < \log y - \log x < \dfrac{y-x}{x}$.

2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ y $0 < a < b$. Prueba que
$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

3. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x)$$
   ¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

4. Prueba que para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ se verifica que:
$$\log(\cos x) \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$
   ¿Cuándo se da la igualdad?

5. Prueba que para todo $x \in]0, \pi/2[$ se verifica que:
$$i)\ 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x\,; \quad ii)\ \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

6. Sean $0 < a < b$. Prueba que si $b \leqslant \mathrm{e}$ entonces $a^b < b^a$, y si $\mathrm{e} \leqslant a$ entonces $b^a < a^b$. ¿Qué puede decirse si $a < \mathrm{e} < b$?.

7. Supuesto que $a > 0$, demuestra que $-a\,\mathrm{e}\log x \leqslant x^{-a}$ para todo $x > 0$.

8. Dado $\alpha \in]0,1[$, prueba que $x^\alpha < \alpha x + 1 - \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
   Deduce que, dados $p > 0$ y $q > 0$ tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces para todos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. ¿Cuándo se da la igualdad?

9. ¿Hay algún número $a > 0$ que verifique que $a^{x/a} \geqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$? ¿Cuál es dicho número?

10. Calcula una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \varphi(x)}{x^5} = 0$.

11. Calcula una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log \operatorname{arc\,tg}(x+1) - \varphi(x)}{x^2} = 0$.

12. Prueba que las únicas funciones n veces derivables con derivada de orden n constante son las funciones polinómicas de grado menor o igual que n.

13. Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:

$$a)\ \alpha = \sqrt[3]{7} \quad b)\ \alpha = \sqrt{\mathrm{e}} \quad c)\ \alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{2} \quad d)\ \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ)$$